ĐÁP ÁN ĐỀ THI TOÁN A2

Mã môn học: MATH130201 Ngày thi: 06/06/2017

Câu		Nội dung	Điểm	Tổng
Câu 1	1.	Ta có $BB^T = \begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\\2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6&0\\0&5\end{bmatrix}$, do đó $$\det\left(BB^T\right)=30 \Rightarrow X=\det\left(BB^T\right)A=30A.$$	**0.5**	**2.0**
		Vậy $\det\left(\frac{1}{6}X\right)=\det\left(5A\right)=5^3\det\left(A\right)$ $$=5^3\left(-18+3m+m^2\right)=-2250+375m+125m^2.$$	**0.5**	
	2.	Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $\det\left(A\right)=-18+3m+m^2\neq 0$.	**0.5**	
		Giải ra ta được $m\neq 3\wedge m\neq -6$.	**0.5**	
Câu 2		Ma trận hệ số của hệ $$\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\2&1&0&-2\\0&3&4&-2\end{bmatrix}\overset{h_2\leftarrow h_2-2h_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&-3&-2&0\\0&3&4&-2\end{bmatrix}\overset{h_3\leftarrow h_3+h_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&-3&-2&0\\0&0&2&-2\end{bmatrix}$$ $$\overset{h_3\leftarrow\frac{1}{2}h_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&-3&-2&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\overset{\substack{h_2\leftarrow h_2+2h_3\\ h_1\leftarrow h_1-h_3}}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&-3&0&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\overset{h_2\leftarrow\frac{-1}{3}h_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&2/3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$ $$\overset{h_1\leftarrow h_1-2h_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&-4/3\\0&1&0&2/3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$	**0.5**	
		Do đó hệ phương trình đã cho tương đương với $$\begin{cases}x_1-\left(4/3\right)x_4=0\\x_2+\left(2/3\right)x_4=0\\x_3-x_4=0\end{cases}.$$ Không gian nghiệm của hệ là: $$\left\{\left(\frac{4}{3}x_4,-\frac{2}{3}x_4,x_4,x_4\right)\mid x_4\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},1,1\right)\mid a\in\mathbb{R}\right\}.$$ Vậy không gian nghiệm là một chiều và $\left\{\left(4/3,-2/3,1,1\right)\right\}$ là một cơ sở. *<u>Chú ý</u>*: Để cho gọn, ta có thể chọn một cơ sở là $\left\{\left(4,-2,3,3\right)\right\}$.	**0.5**	
		Lần lượt thay *x* bởi các giá trị -1, 1, 2 vào ta được hệ phương trình tuyến tính: $$\begin{cases}a-b+c=6\\a+b+c=0\\4a-2b+c=84\end{cases}.$$	**0.5**	
		Giải ra ta được $a=25,b=-3,c=-22$. Vậy đa thức cần tìm là $$f\left(x\right)=x^5-3x^4+2x+25x^2-3x-22=x^5-3x^4+25x^2-x-22.$$	**0.5**	
Câu 3	1	Từ $(q(x))_B=(2,3,-1)$, suy ra	**0.5**	**2.0**

		$q(x) = 2p_1(x) + 3p_2(x) - p_3(x)$ $= 2(-1 + 2x - 2x^2) + 3(2 - 9x + 2x^2) - (-2 + 2x - 5x^2) = 6 - 25x + 7x^2.$		
		Để tìm tọa độ của $p(x)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ ta tìm biểu diễn $$p(x) = ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) \text{ hay}$$ $$3x^2 - 5 = a(-1 + 2x - 2x^2) + b(2 - 9x + 2x^2) + c(-2 + 2x - 5x^2).$$ Phương trình này tương đương với hệ phương trình tuyến tính có ma trận bổ sung là $\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -9 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, giải ra ta được $a = 247, b = 36, c = -85$ hay tọa độ của $p(x)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ là $(p(x))_{\mathcal{B}} = (247, 36, -85)$.	0.5	
	2.	Đặt $\mathcal{S} = \{-3p_1(x) - p_2(x) - 10p_3(x), p_1(x) - 10p_2(x) - 3p_3(x), 5p_1(x) - p_2(x) + 15p$ $= \{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$. Ta có $(q_1(x))_{\mathcal{B}} = (-3, -1, -10), (q_2(x))_{\mathcal{B}} = (1, -10, -3), (q_3(x))_{\mathcal{B}} = (5, -1, 15)$.	0.5	
		Vậy ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang S là $$P_{\mathcal{B}\to S} = \left[[(q_1(x))_{\mathcal{B}}] [(q_2(x))_{\mathcal{B}}] [(q_3(x))_{\mathcal{B}}] \right] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -1 & -10 & -1 \\ -10 & -3 & 15 \end{bmatrix}.$$	0.5	
Câu 4	**1.**	Do $Q_1(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2 = -6\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1\right) - \frac{1}{2}x_1^2$ nên Q_1 xác định âm.	**0.5**	**2.0**
		Ta có: $$\begin{aligned} Q_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 5x_2^2 + 5x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + 0y_3^2. \end{aligned}$$ Do đó Q_2 là bán xác định dương. *Cách khác:* Q_2 có ma trận biểu diễn là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Phương trình đặc trưng là $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 30\lambda = 0$. Ma trận A có các trị riêng là 0, 5, 6 đều không âm, trong đó có một trị riêng là 0. Do đó Q_2 bán xác định dương (nửa xác định dương).	**0.5**	
	2.	Ma trận biểu diễn của Q_2 là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Phương trình đặc trưng là $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 30\lambda = 0$. Giải ra ta được các trị riêng là 0, 5, 6. Với $\lambda = 0$: Ta có	**0.5**	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
$$A-0I=A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&5&0\\2&0&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2\\0&4&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&5/2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$
Giải phương trình $\left(A-0I\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ hay $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ta được không gian riêng tương ứng là $N_A\left(0\right)=\left\{t\left(-5,1,2\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\mathbf{v}_1\mid t\in\mathbb{R}\right\}$.
Với $\lambda=5$: Ta có $A-5I=\begin{bmatrix}-4&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$. Giải phương trình $\left(A-5I\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ta được không gian riêng tương ứng là $N_A\left(5\right)=\left\{t\left(0,-2,1\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\mathbf{v}_2\mid t\in\mathbb{R}\right\}$.
Với $\lambda=6$: Ta có
$$A-6I=\begin{bmatrix}-5&1&2\\1&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-4&2\\0&2&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$
Giải phương trình $\left(A-6I\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ta được không gian riêng tương ứng là $N_A\left(6\right)=\left\{t\left(1,1,2\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\mathbf{v}_3\mid t\in\mathbb{R}\right\}$.
</td>
<td></td>
<td rowspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
Vậy một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ gồm các véctơ riêng của A là:
$$\left\{\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\right\}=\{(1,1,2),(0,-2,1),(-5,1,2)\}.$$
Cơ sở trực chuẩn tương ứng là
$$\left\{\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\left(1,1,2\right),\frac{1}{\sqrt{5}}\left(0,-2,1\right),\frac{1}{\sqrt{30}}\left(-5,1,2\right)\right\}.$$
Đặt $P=\left[\left[\mathbf{u}_1\right]\ \left[\mathbf{u}_2\right]\ \left[\mathbf{u}_3\right]\right]$ thì P là ma trận trực giao, $D=\operatorname{diag}\left(6,5,0\right)$. Đổi biến $\left[\mathbf{x}\right]=P\left[\mathbf{y}\right],\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right),\mathbf{y}=\left(y_1,y_2,y_3\right)\in\mathbb{R}^3$. Khi đó
$$Q_2\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\mathbf{y}^TD\mathbf{y}=6y_1^2+5y_2^2.$$
</td>
<td>0.5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Câu 5</td>
<td rowspan="2">1.</td>
<td>
Từ $f\left(x,y\right)=\left(x-y\right)e^{xy}$, ta có
$$f_x'=e^{xy}+\left(x-y\right)ye^{xy}=\left(xy-y^2+1\right)e^{xy},$$
$$f_y'=-e^{xy}+\left(x-y\right)xe^{xy}=\left(x^2-xy-1\right)e^{xy}.$$
Giải hệ:
$$\begin{cases}f_x'=0\\f_y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(xy-y^2+1\right)e^{xy}=0\\\left(x^2-xy-1\right)e^{xy}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-y^2+1=0\\x^2-xy-1=0\end{cases}.$$
</td>
<td>0.5</td>
<td rowspan="2">2.0</td>
</tr>
<tr>
<td>
Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases}xy-y^2+1=0\\x^2-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-y^2+1=0\\x=y\vee x=-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1/2\\x=-y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right..$$
Vậy $f\left(x,y\right)$ có hai điểm dừng là $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
</td>
<td>0.5</td>
</tr>
</table>

	2.	Tìm các điểm dừng của g: $$\begin{cases} g_x{}' = 0 \\ g_y{}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 8 = 0 \\ 3xy^2 + 48y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -8, y = 2.$$ Vậy g chỉ có một điểm dừng duy nhất là M_0. Các đạo hàm riêng cấp hai là $g''_{xx} = 0, g''_{xy} = 3y^2, g''_{yy} = 6xy + 48$.	**0.5**	
		Tại điểm $M_0\left(-8,2\right)$, $A = g''_{xx}\left(M_0\right) = 0, B = g''_{xy}\left(M_0\right) = 12, g''_{yy}\left(M_0\right) = -48$ nên $\Delta = AC - B^2 = -12^2 = -144 < 0$. Vậy hàm số không đạt cực trị tại M_0, và do đó hàm số này không có cực trị.	**0.5**	
			Tổng	**10.0**